

文章编号: 1001-2486 (2001) 06-0013-04

一种高精度六面体广义协调元*

任钧国, 张书俊, 欧阳勇

(国防科技大学航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 在八节点六面体等参单元的基础上在其各个面的法向方向上增加一个自由度, 同时为了提高精度, 改善其性能, 消除几何敏感性, 又引入七个非协调的内部位移函数和一个泡状函数作为附加位移。数值计算表明该单元的性能良好。

关键词: 法线方向; 六面体单元; 广义协调元; 有限元法

中图分类号: V414 **文献标识码:** A

A Hexahedron Generalized Conforming Element with High Accuracy

REN Jun-guo, ZHANG Shu-jun, OUYANG Yong

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: In this paper a normal freedom on each area is given on 8-node hexahedron isoparametric element. At the same time seven unconforming inner displacement functions and one bubble function are adopted as additional displacement in order to eliminate geometry sensitivity and gain high precision. Numerical results show that this element is of excellent properties.

Key words: normal; hexahedron element; generalized conforming element; FEM

利用有限单元法进行三维结构问题的分析时, 首先必须确定使用什么样的单元。从使用四面体单元开始, 到目前积累了许多高精度体单元, 如二次四面体单元、六面体单元及各种等参体单元。为了提高有限元的计算精度, 使所划分的单元能够适应复杂的曲面边界, 经常使用等参元。八节点六面体等参单元, 作为一种低阶单元, 形式简单, 划分方便, 节省机时, 但精度较差。

1 单元位移函数

所讨论的六面体十四节点三十自由度等参广义协调元如图1所示, 六面体各角节点含有 (u_i, v_i, w_i) 三个自由度, 且在各个面的法线方向上有一个自由度 U_i 。

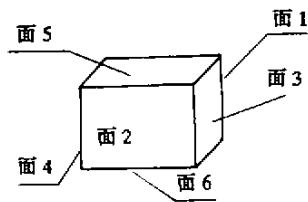
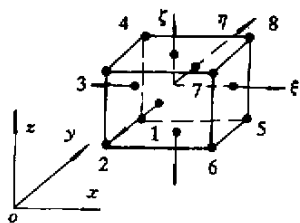


图1 六面体等参元

Fig.1 Hexahedron isoparametric element

六面体各角节点形状函数为:

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta) / 8 \quad (i = 1, 2, \dots, 8) \quad (1)$$

六面体各个面的形状函数为:

* 收稿日期: 2001-06-10
作者简介: 任钧国 (1946-), 男, 教授, 博士生导师。

$$\begin{cases} N_1^f(\xi, \eta, \zeta) = (1 - \zeta^2)(1 - \xi^2)(1 + \eta)/2 \\ N_2^f(\xi, \eta, \zeta) = (1 - \zeta^2)(1 - \xi^2)(1 - \eta)/2 \\ N_3^f(\xi, \eta, \zeta) = (1 - \eta^2)(1 - \zeta^2)(1 + \xi)/2 \\ N_4^f(\xi, \eta, \zeta) = (1 - \eta^2)(1 - \zeta^2)(1 - \xi)/2 \\ N_5^f(\xi, \eta, \zeta) = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)(1 + \zeta)/2 \\ N_6^f(\xi, \eta, \zeta) = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)(1 - \zeta)/2 \end{cases} \quad (2)$$

单元的节点自由度表示为：

$$\delta = [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \quad \delta_4 \quad \delta_5 \quad \delta_6 \quad \delta_7 \quad \delta_8 \quad U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad U_4 \quad U_5 \quad U_6]^T$$

其中： $\delta_i = [u_i \quad v_i \quad w_i]^T$, $U_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ 分别表示面 1, 2, 3, 4, 5, 6 上法线上的节点自由度。

单元位移函数由三部分组成：

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \bar{u}_o + \bar{u}_f + \bar{u}_\lambda \quad (3)$$

其中， \bar{u}_o 为相应八节点二十四自由度等参体单元的协调位移函数，

$$\bar{u}_o = \begin{pmatrix} u_o \\ v_o \\ w_o \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i^o(\xi, \eta, \zeta) \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{pmatrix} \quad (4)$$

\bar{u}_f 为法线方向自由度确定的位移，且

$$\bar{u}_f = \begin{pmatrix} u_f \\ v_f \\ w_f \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^6 \begin{Bmatrix} n_i^1 N_i^f(\xi, \eta, \zeta) \\ n_i^2 N_i^f(\xi, \eta, \zeta) \\ n_i^3 N_i^f(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} u_i^f \quad (5)$$

其中， n_i^1, n_i^2, n_i^3 为各个面法线方向矢量沿各轴的分量， $N_i^f(\xi, \eta, \zeta)$ 为各个面的形函数。

为了提高计算精度，引入用内部自由度表示的附加位移场 \bar{u}_λ ，为了保证单元通过分片试验，采用了如下广义协调条件：

$$\iiint_V \bar{u}_\lambda d\xi d\eta d\zeta = 0 \quad (6)$$

$$\bar{u}_\lambda = \begin{pmatrix} u_\lambda \\ v_\lambda \\ w_\lambda \end{pmatrix} = \mathbf{N}_\lambda \boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 f_1 + \lambda_4 f_2 + \lambda_7 f_3 + \lambda_{10} f_4 + \lambda_{13} f_5 + \lambda_{16} f_6 + \lambda_{19} f_7 + \lambda_{22} f_8 \\ \lambda_2 f_1 + \lambda_5 f_2 + \lambda_8 f_3 + \lambda_{11} f_4 + \lambda_{14} f_5 + \lambda_{17} f_6 + \lambda_{20} f_7 + \lambda_{23} f_8 \\ \lambda_3 f_1 + \lambda_6 f_2 + \lambda_9 f_3 + \lambda_{12} f_4 + \lambda_{15} f_5 + \lambda_{18} f_6 + \lambda_{21} f_7 + \lambda_{24} f_8 \end{pmatrix} \quad (7)$$

函数 f_i 是满足 (6) 的七个附加位移函数：

$$\begin{aligned} f_1 &= \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 1 & f_5 &= \xi\eta(\zeta^2 - 13/10) \\ f_2 &= \xi(\eta^2 + \zeta^2 - 2/3) & f_6 &= \xi\zeta(\eta^2 - 13/10) \\ f_3 &= \eta(\xi^2 + \zeta^2 - 2/3) & f_7 &= \eta\zeta(\xi^2 - 13/10) \\ f_4 &= \zeta(\xi^2 + \eta^2 - 2/3) \end{aligned} \quad (8)$$

以及所加入的泡状函数：

$$f_8 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)(1 - \zeta^2) \quad (9)$$

其中，

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_\lambda &= [\mathbf{N}_{\lambda 1} \quad \mathbf{N}_{\lambda 2} \quad \mathbf{N}_{\lambda 3} \quad \mathbf{N}_{\lambda 4} \quad \mathbf{N}_{\lambda 5} \quad \mathbf{N}_{\lambda 6} \quad \mathbf{N}_{\lambda 7} \quad \mathbf{N}_{\lambda 8}] \\ \mathbf{N}_{\lambda i} &= \begin{bmatrix} f_i & 0 & 0 \\ 0 & f_i & 0 \\ 0 & 0 & f_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\lambda = \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_{23} \quad \lambda_{24} \quad \mathbf{J}^T$$

将(4),(5),(7)代入(3)式,就可以得到本文新建单元的位移场函数:

$$\bar{u} = \mathbf{N} \mathbf{q}^e + \mathbf{N}_\lambda \lambda \quad (11)$$

式中, $\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2 \dots N_8 \quad N_{f1} \quad N_{f2} \quad N_{f3} \quad N_{f4} \quad N_{f5} \quad N_{f6}]$

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_i^o & 0 & 0 \\ 0 & N_i^o & 0 \\ 0 & 0 & N_i^o \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_{fi} = \begin{bmatrix} N_i^f n_i^1 \\ N_i^f n_i^2 \\ N_i^f n_i^3 \end{bmatrix}$$

2 单元刚度矩阵和载荷矩阵

单元上的平衡方程为:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{qq} & \mathbf{K}_{q\lambda} \\ \mathbf{K}_{\lambda q} & \mathbf{K}_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^e \\ \lambda^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

这里, $\mathbf{K}_{qq} = \iiint_{\xi, \eta, \zeta \in [-1, 1]} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |J| d\xi d\eta d\zeta$

采用凝聚方法将其中的内部自由度 λ 用单元节点自由度表示, 从式(12)第二式可以得到:

$$\lambda^e = -\mathbf{K}_{\lambda\lambda}^{-1} \mathbf{K}_{\lambda q} \mathbf{q}^e \quad (13)$$

这样(11)式可以改写成:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}^* \mathbf{q}^e \quad (14)$$

式中: $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} - \mathbf{N}_\lambda \mathbf{K}_{\lambda\lambda}^{-1} \mathbf{K}_{\lambda q}$, $\mathbf{K}_{\lambda\lambda} = \iiint_{\xi, \eta, \zeta \in [-1, 1]} \mathbf{B}_\lambda^T \mathbf{D} \mathbf{B}_\lambda |J| d\xi d\eta d\zeta$, $\mathbf{K}_{\lambda q} = \iiint_{\xi, \eta, \zeta \in [-1, 1]} \mathbf{B}_\lambda^T \mathbf{D} \mathbf{B} |J| d\xi d\eta d\zeta$.

在以上各式中, \mathbf{B} , \mathbf{B}_λ 分别表示与 \mathbf{N} , \mathbf{N}_λ 对应的应变矩阵; \mathbf{D} 为材料弹性矩阵; $|J|$ 是坐标求导变换中的 Jacobi 行列式。

若将(13)代入(12)式, 得单元刚度矩阵:

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{K}_{qq} - \mathbf{K}_{q\lambda} \mathbf{K}_{\lambda\lambda}^{-1} \mathbf{K}_{\lambda q} \quad (15)$$

对于作用在单元域内的分布载荷 \mathbf{P} 及边界分布载荷 $\bar{\mathbf{P}}$, 单元的等效节点力为:

$$\mathbf{F}^e = \iint_A [\mathbf{N}^*]^T \mathbf{P} dA + \iint_{\partial A} [\mathbf{N}^*]^T \bar{\mathbf{P}} dS \quad (16)$$

其中, A 、 ∂A 分别表示载荷分布区域。

将单元刚度矩阵 \mathbf{K}^e 与单元载荷列阵 \mathbf{F}^e 分别拼装组成整体刚度矩阵 \mathbf{K} 和载荷列阵 \mathbf{F} , 得到关于节点的平衡方程:

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (17)$$

处理边界条件后求解(17)可得 \mathbf{q} , 从而利用式(13)求得附加位移 λ 。

利用几何方程求得应变分量:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{q}^e + \mathbf{B}_\lambda \lambda^e \quad (18)$$

然后便可利用本构方程求得单元应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 。

3 算例

3.1 分片检验

如图2所示块体是为常应力分片检验划分的网格, 经计算得知, 新单元得到的各节点位移和应力与精确值完全一致, 说明该单元能通过分片试验。

3.2 均匀拉伸问题

如图3所示均匀拉伸问题, 计算结果比较见表1。从表中可以看出, 新单元 NH14 的节点位移及

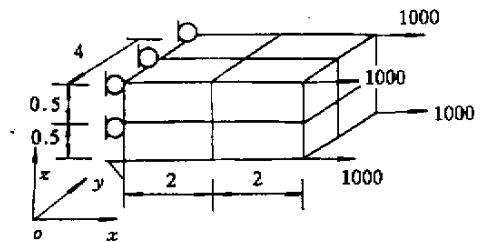


图2 分片试验

Fig.2 Patch test

应力值与精确解完全一致，同时老单元 H8 的计算结果也与精确解非常吻合，这表明八节点二十四自由度等参元 H8 在均匀拉伸问题中也已具有较高的精度。

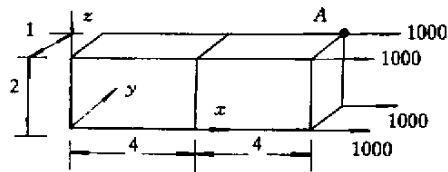


图 3 均匀拉伸问题
Fig.3 Uniform tension

表 1 均匀拉伸问题数值比较

Tab.1 Comparison of uniform tension						
单元	节点位移			立方体任一点应力		
	u_A	v_A	w_A	σ_x	σ_y	σ_z
H8	10.67	-0.4	-0.8	2000	0.0	0.0
H11 ^[4]	14.86	-0.276	-0.524	无常应力态		
NH14	10.67	-0.4	-0.8	2000	0.0	0.0
精确解	10.67	-0.4	-0.8	2000	0.0	0.0

3.3 纯弯曲问题

图 4 是一悬臂梁的纯弯曲问题，旨在考查单元的弯曲性能，从表 2 可以看出，老单元 H8 的节点位移及应力值与理论解相比有较大的误差，而新单元 NH14 的计算结果与理论解非常接近；这说明，由于非协调内位移的引入，新单元 NH14 明显改善了八节点二十四自由度等参元 H8 的弯曲解。

$M = 2000 \quad E = 1500 \quad \mu = 0.3 \quad a = 10/3$

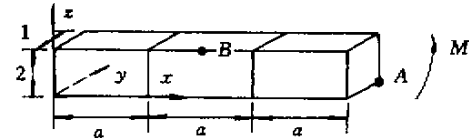


图 4 纯弯曲问题
Fig.4 Pure bending

表 2 纯弯曲解的数值比较

Tab.2 Comparison of pure bending		
单元	v_A	σ_{xB}
H8	45.79	-1187.01
NH14	98.14	-2140.20
理论解	100.00	-3000.00

4 结论

本文构造的单元能够通过分片试验，保证了单元的收敛性。在位移有限元模型中，通过应用内部自由度表示的附加位移场来改善单元性能并不是一个新概念。但是通过采用非协调的附加位移场则不能保证单元在任何情况下收敛，本文采用广义协调的方法，有效地解决了三维六面体单元这一问题，并改善了其性能。算例表明，所构造的单元是一种简单、有效的低阶单元，在节约了计算机时间和内存的前提下，保持了较高的精度，具有实用价值，也有一定的理论意义。

参考文献：

[1] Allman D J. A compatible Triangular Element including Vertex Rotations for Plane elasticity Analysis [J]. Computers & Structures, 19: 1-8, 1984.

[2] 龙驭球, 须寅. 构造几何不敏感四边形膜元的广义协调方法 [J]. 力学学报, 29 (6), 1997.

[3] 任钧国, 熊龙飞. 带转动自由度的轴对称四边形单元 [J]. 国防科技大学学报, 23 (3), 2001.

[4] 吴长春. 非协调数值分析与杂交元法 [M]. 北京: 科学出版社, 1997.

[5] 任钧国, 熊龙飞. 低阶高精度单元的发展 [J]. 国防科技大学学报, 20 (4), 1998.

[6] 任钧国. 计算结构力学 [M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1997.